# Bessel 関数

熱工学第 2　丸山

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

において，$\nu=n$（整数）の場合は，基本解が第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ と第 2 種ベッセル関数 $Y_n(x)$ になる．なお，第 2 種ベッセル関数はノイマン(Neumann)関数とも呼ばれる．

展開公式：

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos(n\pi)-J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

漸化式：

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x),\quad J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

$$J_{n+1}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_n'(x),\quad J_{n-1}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)+J_n'(x)$$

$$J_0'(x)=-J_1(x)$$

$$Y_0'(x)=Y_1(x)$$

$$J_0(0)=1,\quad J_1(0)=0,\quad Y_0(0)=-\infty,\quad Y_1(0)=-\infty$$